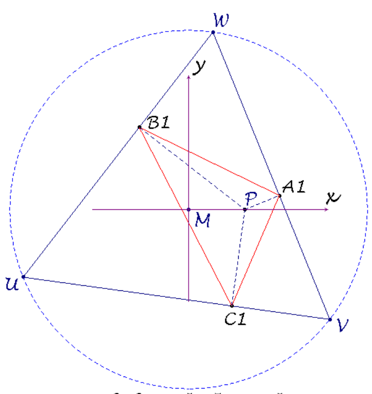
**Gleichseitige Dreiecke im Kreis**

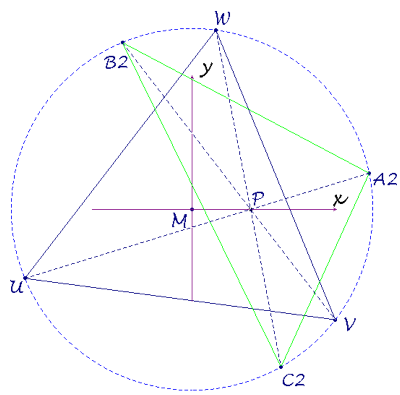
**– aus der Sicht eines Punktes –**

Eckart Schmidt

*Zu einem Punkt und einem gleichseitigen Dreieck in seinem Umkreis lassen sich zwei weitere Dreiecke bilden: das Lotfußpunktdreieck und das perspektive Dreieck im Umkreis. Diese beiden Dreiecke erweisen sich als ähnlich. Betrachtet man alle gleichseitigen Dreiecke im Umkreis, so lassen sich Invarianten der Lotfußpunktdreiecke und der perspektiven Dreiecke im Kreis aufzeigen. Z.B. haben die Lotfußpunktdreiecke den gleichen Schwerpunkt und sind flächengleich während die perspektiven Dreiecke im Kreis im Lemoine-Punkt und den Brocard-Punkten übereinstimmen. Gemeinsam ist allen Lotfußpunktdreiecken und perspektiven Dreiecken im Kreis der gleiche Brocard-Winkel. – Gearbeitet wird mit kartesischen Koordinaten, wenn auch PC-gestützt.*




Lotfußpunktdreieck




perspektives Dreieck im Kreis

## Invariante Größen der Lotfußpunktdreiecke

Ein Punkt $P$ habe vom Mittelpunkt $M$ eines Kreises vom Radius $r$ den Abstand $p$. Der Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems liege im Punkt $M$, und der Punkt $P$ erhalte die Koordinaten $P(p;0)$. Betrachtet werden gleichseitige Dreiecke $UVW$ im Kreis. Gibt man einer Ecke des gleichseitigen Dreiecks die Koordinaten

$$U(r\cos\varphi; r\sin\varphi),$$

so erhält man die anderen Ecken für die Winkel $\varphi \pm 120°$. Die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks beträgt $\sqrt{3}r$ .

Lotet man von $P$ auf die Seitengerade $VW$ des gleichseitigen Dreiecks, so ist der Lotfußpunkt

$$A_1(-\frac{r}{2}\cos\varphi + p\sin^2\varphi; -\frac{r}{2}\sin\varphi - \frac{p}{2}\sin 2\varphi) .$$

Entsprechende Darstellungen ergeben sich für die Lotfußpunkte $B_1$ und $C_1$ zu den Winkeln $\varphi \pm 120°$.

Für die orientierten Abstände des Punktes $P$ von den Seiten der gleichseitigen Dreiecke gilt

$$PA_1 + PB_1 + PC_1 = \frac{3}{2}r ,$$

wie eine Flächenbilanz der gleichseitigen Dreiecke unmittelbar aufzeigt.

Die Seitenlänge $B_1C_1$ eines Lotfußpunktdreiecks errechnet sich zu

$$a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{p^2 + r^2 - 2pr\cos\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{2}PU ,$$

Die Seitenlängen der Lotfußpunktdreiecke sind also bis auf den Faktor $\frac{\sqrt{3}}{2}$ die Abstände des Punktes $P$ von den Ecken des gleichschenkligen Dreiecks. Die Quadratsumme der Seitenlängen erweist sich als konstant:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = \frac{9}{4}(p^2 + r^2),$$

Für den Umkreisradius $r_1$ von $A_1B_1C_1$ ergibt sich

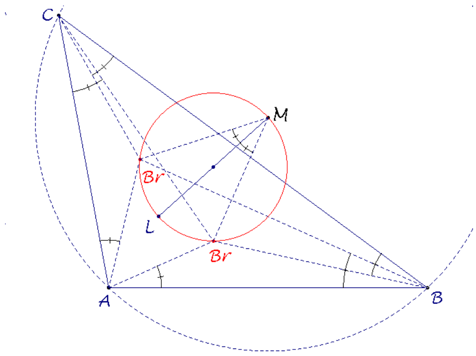
$$r_1 = \frac{\sqrt{p^6 + r^6 - 2p^3r^3\cos(3\varphi)}}{2|p^2 - r^2|} .$$

Damit haben alle Lotfußpunktdreiecke den gleichen Flächeninhalt:

$$\Delta_1 = \frac{a_1b_1c_1}{4r_1} = \frac{3\sqrt{3}}{16}|p^2 - r^2|.$$

**Satz 1: Lotet man von einem Punkt auf die Seitengeraden gleichseitiger Dreiecke in einem Kreis, so haben die Lotfußpunktdreiecke den gleichen Flächeninhalt und stimmen in der Quadratsumme ihrer Seitenlängen und damit in ihrem Brocard-Winkel überein.**

Zur Brocard-Geometrie eines Dreiecks sei hier nur angemerkt, dass es in einem Dreieck zwei Punkte – die Brocard-Punkte – gibt, die über den Seiten rechts-, bzw. linksseitig unter dem gleichen Erhebungswinkel gesehen werden.




Brocard-Winkel

Die Brocard-Punkte $B_r$ liegen auf dem Thales-Kreis über der Umkreismitte $M$ und dem Lemoine-Punkt $L$. Dabei ist der Winkel $\angle LMB_r$ gleich dem Erhebungswinkel und wird als Brocard-Winkel $\omega$ angesprochen, der sich wie folgt berechnen lässt ([1], S.60):

$$\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta} \quad .$$

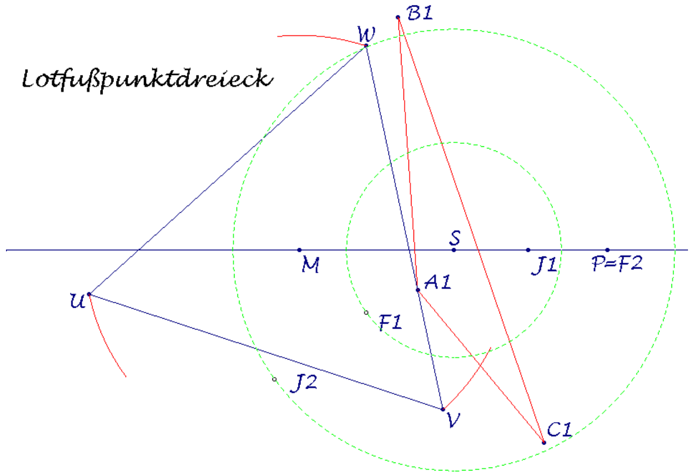
Für die Lotfußpunktdreiecke ergibt sich dann

$$\cot\omega = \frac{\sqrt{3}(p^2+r^2)}{\left|p^2-r^2\right|} \quad .$$

**Invariante Punkte der Lotfußpunktdreiecke**

Der Schwerpunkt eines Lotfußpunktdreiecks $A_1B_1C_1$ errechnet sich unschwer als Mittelpunkt von $M$ und $P$ zu

$$S(\frac{p}{2};0).$$




**Satz 2: Lotet man von einem Punkt *P* auf die Seitengeraden gleichseitiger Dreiecke in einem Kreis, so haben die Lotfußpunktdreiecke den gleichen Schwerpunkt, einen gemeinsamen isodynamischen Punkt sowie in *P* einen gemeinsamen isogonen Punkt.**

Die isodynamischen Punkte eines Dreiecks sind die beiden Schnittpunkte der Apollonius-Kreise. Diese Schnittpunkte errechnen sich zu

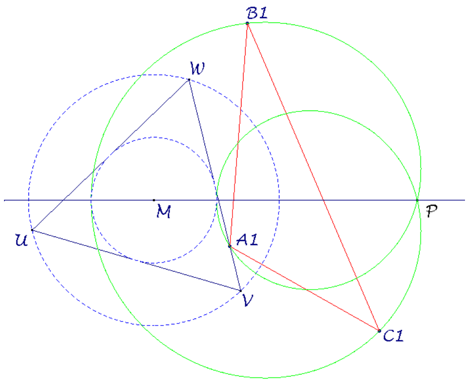
$$J_1\left(\frac{p^2+r^2}{2p};0\right) \quad und \quad J_2\left(\frac{p(r+p\cos(3\varphi))}{2r};\frac{p^2\sin(3\varphi)}{2r}\right).$$

Die Lotfußpunktdreiecke stimmen also in einem der beiden isodynamischen Punkte überein, während der andere isodynamische Punkt einen Kreis um den Schwerpunkt mit dem Radius $p^2/(2r)$ durchläuft.

Die isogonalen Bilder der isodynamischen Punkte sind die beiden isogonen Punkte, die man erhält, wenn man über/unter den Seiten gleichseitige Dreiecke zeichnet und die Schnittpunkte der Ecktransversalen der „Spitzen" betrachtet. Im ersten Fall spricht man auch vom Fermat-Punkt. Die isogonen Punkte errechnen sich zu

$$F_1\left(\frac{p+r\cos(3\varphi)}{2};\frac{r\sin(3\varphi)}{2}\right) \quad und \quad F_2(p;0).$$

Dabei erweist sich das isogonale Bild des isodynamischen Punktes, in dem die Lotfußpunktdreiecke nicht übereinstimmen, als der eingangs vorgegebene Punkt *P*, der somit gemeinsamer isogoner Punkt aller Lotfußpunktdreiecke ist. Der andere isogone Punkt beschreibt einen Kreis um den Schwerpunkt mit dem Radius *r/2*. Liegt der Punkt *P* im vorgegebenen Kreis, so ist *P* der Fermat-Punkt der Lotfußpunktdreiecke.




Pascalsche Schnecke

Abschließend sei die Ortslinie der Ecken der Lotfußpunktdreiecke angesprochen. Lotet man von einem Punkt auf die Tangenten eines Kreises, so erhält man bekanntlich eine Pascalsche Schnecke ([2], S.126). Nun sind die Seitengeraden der gleichseitigen Dreiecke im Kreis Tangenten des gemeinsamen Inkreises, daher liegen die Ecken der Lotfußpunktdreiecke auf einer Pascalschen Schnecke. Legt man den Urprung des Koordinatensystems in den Punkt *P*, dann hat diese Pascalsche Schnecke in Polarkoordinaten $\rho(\psi)$ die Gleichung

$$\rho = \pm\frac{r}{2} - p\cos\psi$$

**Satz 3: Lotet man von einem Punkt auf die Seitengeraden gleichseitiger Dreiecke in einem Kreis, so liegen die Lotfußpunkte auf einer Pascalschen Schnecke.**

Für einen Punkt *P* auf dem Inkreis ergibt sich der Sonderfall einer Kardioide.

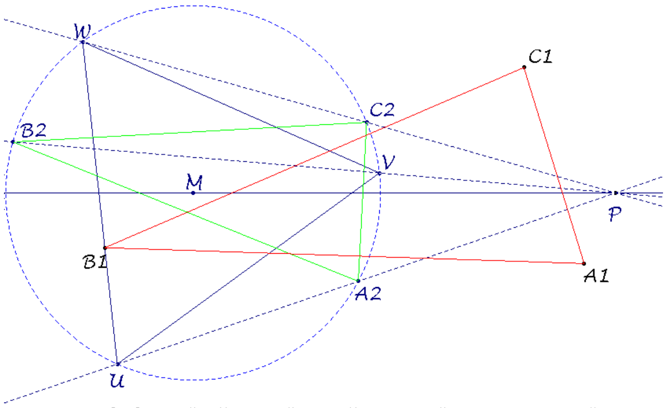
**Perspektive Dreiecke im Kreis**

Zu einem Punkt *P* und den gleichseitigen Dreiecken *UVW* in einem Kreis werden jetzt die perspektiven Bilder $A_2B_2C_2$ im Kreis betrachtet.

So errechnet sich der perspektive Partner $A_2$ von Punkt *U* zu

$$A_2\left(\frac{r(2pr-(p^2+r^2)\cos\varphi)}{p^2+r^2-2pr\cos\varphi};\frac{r(p^2-r^2)\sin\varphi}{p^2+r^2-2pr\cos\varphi}\right),$$

und die Punkte $B_2$ und $C_2$ erhält man zu den Winkeln $\varphi \pm 120°$.




*Lotfußpunktdreieck und perspektives Dreieck*

Die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ erweisen sich als ähnlich, denn ein Seitenlängenvergleich ergibt

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{2r|p^2 - r^2|}{\sqrt{p^6 + r^6 - 2p^3r^3\cos(3\varphi)}}.$$

**Satz 4. Für gleichseitige Dreiecke im Kreis sind das Lotfußpunktdreieck eines Punktes und das perspektive Dreieck im Kreis ähnlich.**

Hinterfragt man die invarianten Punkte der perspektiven Dreiecke im Kreis, so errechnet sich der Lemoine-Punkt $L$ als isogonales Bild des Schwerpunktes zu

$$L(\frac{2pr^2}{p^2 + r^2}, 0).$$

Die isodynamischen Punkte, d.h. die Schnitte der Apollonius-Kreise, sind

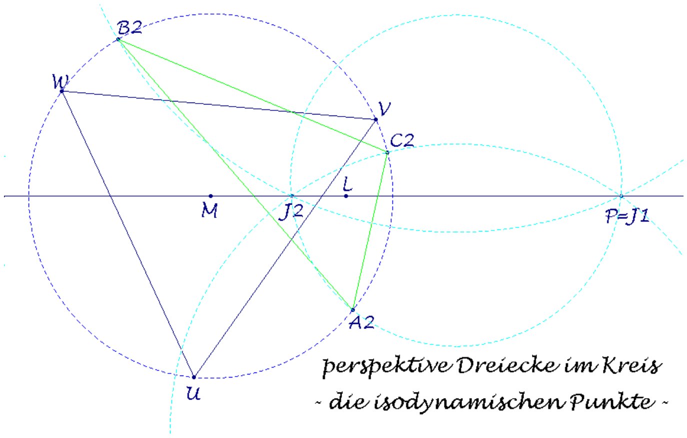
$$J_1(p,0) \quad und \quad J_2(\frac{r^2}{p}, 0) \quad ,$$

d.h. das Perspektivzentrum $P$ und seine Spiegelung am Umkreis der gleichseitigen Dreiecke. Die isodynamischen Punkte teilen die Strecke $ML$ harmonisch im Verhältnis

$$\frac{p^2 + r^2}{|p^2 - r^2|} = \frac{\cot\omega}{\sqrt{3}} \quad .$$

Es sei angemerkt, dass die beiden isogonen Punkte sich auf Kreisen bewegen. Spiegelt man den Lemoine-Punkt an diesen Kreisen, so erhält man die isodynamischen Punkte.

> **Satz 5: Die perspektiven Dreiecke von gleichseitigen Dreiecken im Kreis haben einen gemeinsamen Lemoine-Punkt und gemeinsame isodynamische Punkte, von denen einer in das Perspektivzentrum fällt.**



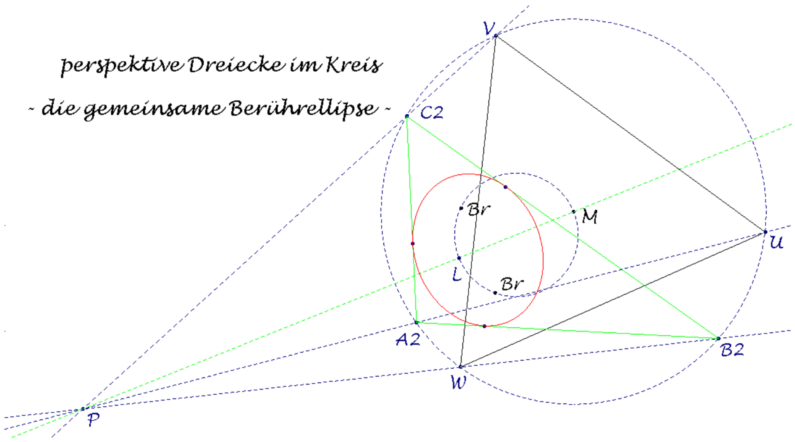

**Brocard-Geometrie der perspektiven Dreiecke im Kreis**

Die perspektiven Dreiecke im Kreis haben nicht nur gemeinsame merkwürdige Punkte, sondern auch einen gemeinsamen Berührkegelschnitt mit der Gleichung

$$\frac{\left(x-\frac{3pr^2(p^2+r^2)}{2(p^4+p^2r^2+r^4)}\right)^2}{\frac{r^2(p^2-r^2)^4}{4(p^4+p^2r^2+r^4)^2}}+\frac{y^2}{\frac{r^2(p^2-r^2)^2}{4(p^4+p^2r^2+r^4)}}=1 .$$

Dieser Kegelschnitt ist eine Ellipse; der Lemoine-Punkt ist der Brianchon-Punkt (Ceva-Punkt des Berührdreiecks). Der Nebenscheitelkrümmungskreis hat den Radius r/2.

> **Satz 7. Die perspektiven Bilder gleichseitiger Dreiecke im Kreis haben eine gemeinsame Berührellipse; Brennpunkte sind die gemeinsamen Brocard-Punkte, Brianchon-Punkt ist der gemeinsame Lemoine-Punkt.**




Die Brennpunkte dieser Berührellipse

$$B_r\left(\frac{3pr^2(p^2+r^2)}{2(p^4+p^2r^2+r^4)};\pm\frac{\sqrt{3}pr^2(p^2-r^2)}{2(p^4+p^2r^2+r^4)}\right)$$

liegen auf dem Thales-Kreis über $ML$, d.h. auf dem sogenannten Brocard-Kreis, mit der Gleichung

$$\left(x-\frac{pr^2}{p^2+r^2}\right)^2+y^2=\frac{p^2r^4}{(p^2+r^2)^2} \quad .$$

Dabei gilt

$$\cot(\angle LMB_r)=\frac{\sqrt{3}(p^2+r^2)}{\left|p^2-r^2\right|}=\cot\omega \quad ,$$

so dass es sich bei den Punkten $B_r$ um die Brocard-Punkte der perspektiven Dreiecke im Kreis handelt. Der Brocard-Winkel ist aufgrund der Ähnlichkeit der gleiche wie bei den Lotfußpunktdreiecken.

**Ausblick**

Die Lotfußpunktdreiecke von gleichseitigen Dreiecken im Kreis bzgl. eines vorgegebenen Punktes haben bei gleichem Flächeninhalt

$$\Delta_1=\frac{3\sqrt{3}}{16}\left|p^2-r^2\right|$$

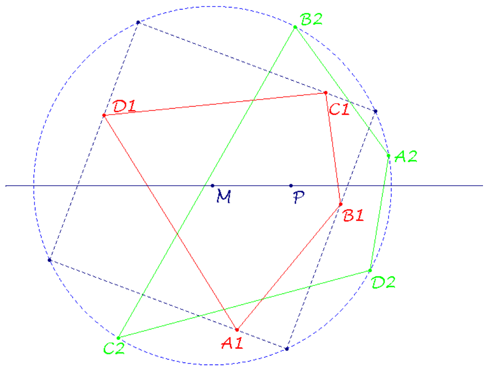
die gleiche Summe der Seitenquadrate

$$a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2=\frac{9}{4}(p^2+r^2).$$

Die bzgl. eines vorgegebenen Punktes perspektiven Dreiecke von gleichseitigen Dreiecken im Kreis haben bei gleichem Radius die gleiche Summe der reziproken Seitenquadrate

$$\frac{1}{a_2{}^2}+\frac{1}{b_2{}^2}+\frac{1}{c_2{}^2}=\frac{p^4+p^2r^2+r^4}{r^2(p^2-r^2)^2}.$$

Diese Zusammenhänge lassen sich verallgemeinern:



Lotfußpunktviereck und perspektives Viereck
zu einem Quadrat im Kreis

**Satz 8.** **Zu regulären n-Ecken in einem Kreis und vorgegebenem Punkt haben die Lotfußpunkt-n-Ecke den gleichen Flächeninhalt und die gleiche Summe der Seitenquadrate; die perspektiven n-Ecke im Kreis aber bei gleichem Radius die gleiche Summe der reziproken Seitenquadrate.**

Die zugehörigen Berechnungen ergeben:

Für die Lotfußpunkt-n-Ecke

$$\Delta = \frac{n\sin(2\pi/n)}{4}\left|r^2+(p^2+r^2)\cos(2\pi/n)\right|,$$

$$s_1{}^2+s_2{}^2+\ldots+s_n{}^2=n(p^2+r^2)\sin^2(2\pi/n);$$

für die perspektiven n-Ecke mit Umkreisradius $r$

$$\frac{1}{s_1{}^2}+\frac{1}{s_2{}^2}+\ldots+\frac{1}{s_n{}^2}=\frac{n(p^4+4p^2r^2\cos^2(\pi/n)+r^4)}{4r^2(p^2-r^2)^2\sin^2(\pi/n)}.$$

Eine Verallgemeinerung der zugehörigen Brocard-Geometrie sei einer weiteren Ausarbeitung vorbehalten.

**Literatur**

[1] E. Donath: Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks. – VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976.

[2] H. Schmidt: Ausgewählte höhere Kurven. – Kesselringsche Verlagsbuchhandlung Wiesbaden, 1949.

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de